ENSA-ALHOCEIMA **CP II**
ANALYSE 3 **SEMESTRE 1**

Exercice 1 :

Calculer les dérivées partielles et la différentielle des fonctions suivantes :

1- $f(x,y) = 4x^4 \sin(x+y) + ye^x$
2- $g(x,y,z) = z(\log y + \log x)$
3- $h(x,y,z) = \frac{y^5 z}{\sqrt{x^2+4}}$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = \left(y\sqrt{x}, \frac{\cos x \sin y}{(xy)^2+1}\right)$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Etudier la différentiabilité de f sur D_f .
3- Déterminer la matrice jacobienne $J_f(x,y)$.
4- En déduire la différtielle de .

Exercice 3 :

Soit la fonction $f:]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & si \quad y \leq x, \\ (1-x)y & si \quad y > x \end{cases}$$

1- Déterminer le domaine de définition D_f.
2- Etudier la continuité de f sur D_f.
3- Soit $0 < x_0 < 1$, étudier la dérivabilité des deux fonctions $f(.,x_0)$ et $f(x_0,.)$en x_0 ,
4- En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)$.
5- Etudier la dérivabilité de f par rapport à x et à y en (x,y) tel que $x \neq y$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exercice 4 :

Etudier la continuité et l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes :

1- $f(x,y) = |x| + |y|$
2- $g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 5 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1- Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
   a- $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_1(x,y) = f(2x-y, 4x+y^2)$
   b- $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x,y) = f(x^3+2, e^{xy})$
   c- $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x) = f(x,x^4)$

2- Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x)\right).$$

Exercice 6 :

On considère l'application $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x + z^2)exp\left(x(y^2+z^2 + 1)\right).$$

1- Rappeler le domaine de définition D de f , puis montrer que f est différentiable sur D.

2- Calculer le gradient $\nabla f(x,y,z)$ de f

3- Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par $h(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

4- Expliciter la différentielle $df(x,y,z)$ de f, puis établir la relation entre $df(x,y,z)$ et $\nabla f(x,y,z)$.

5- On appelle les points critiques de f les solutions de l'équations :

$$\nabla f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

a- Montrer que f n'admet qu'un seul point critique $A(x_A, y_A, z_A)$ où x_A ,y_A et z_A sont à déterminer.

b- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_A, y_A, z_A)$, , $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_A, y_A, z_A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_A, y_A, z_A)$.

c- Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x,y,z) \geq -\frac{1}{e}$

et que pour tout $x < 0$ on a :

$$xe^x \leq f(x,y,z) \leq z^2 exp\left(x(y^2 + z^2 + 1)\right).$$

6- Calculer $f(x_A, y_A, z_A)$, $\lim_{(x,y,z)\to -\infty} f(x,y,z)$ et $\lim_{(x,y,z)\to +\infty} f(x,y,z)$ où $\pm\infty = (\pm\infty, \pm\infty, \pm\infty)$